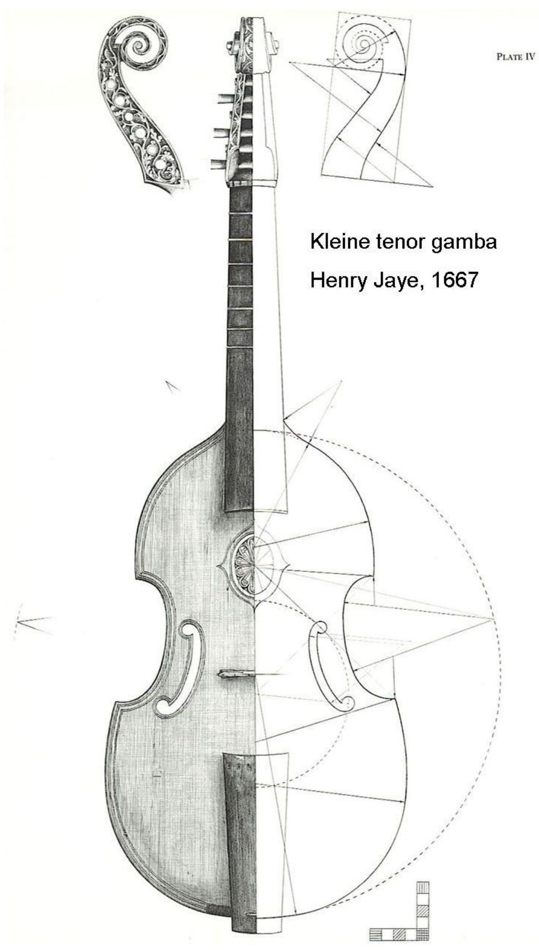
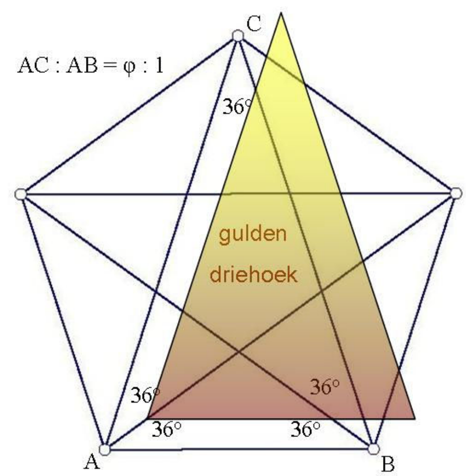
De Viola da Gamba en de Gulden Snede





Gulden Ratio of "Goddelijke Verhouding":

$$\phi = \frac{1}{\phi} + 1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1,618...$$

Puurs
2006—2007

ROEL STROEKER

Vlinderslag 17
2924 VK Krimpen a/d IJssel
Nederland

tel.: +31 180510227
e-mail: roel@stroeker.nl

Inleiding

Als professioneel wiskundige en amateur luthier heb ik me soms afgevraagd of de vormen van gangbare snaarinstrumenten in mathematische formules te vangen zouden zijn. Ik heb tot nu toe nergens gevonden dat er luthiers zijn of waren die bij de bouw van hun instrument gebruik maken of maakten van zulke formules of geavanceerde geometrische constructies; het is gebruikelijk uit te gaan van de geobserveerde maten van een beroemd instrument om dit zo nauwkeurig mogelijk na te bouwen, eventueel met kleine, soms onvermijdelijke aanpassingen. Inmiddels is mij na enig zoekwerk gebleken dat er ook luthiers zijn die hun ontwerpen volledig baseren op meetkundige constructies, in het bijzonder op de gulden snede (zie [1]). Als het alleen om de esthetiek gaat ligt het bij het zoeken naar meetkundige regelmaat in de vormgeving van muziekinstrumenten voor de hand om als eerste te denken aan deze gulden snede, ook wel goddelijke verhouding genoemd. Onnoemelijk veel publicaties zijn er in de loop van vele eeuwen verschenen over de gulden snede en toepassingen of verschijningsvormen ervan op velerlei gebied. Een aantal overbekende voorbeelden uit de literatuur (zoals het gebruik van de gulden snede bij de constructie van de Grote Egyptische Piramide van Gizeh en het Parthenon in Athene) doen naar mijn smaak geforceerd aan. Ten aanzien van de muziekinstrumentenbouw echter komt het mij voor dat het goed mogelijk is dat sommige oude meesters bekend waren met de gulden snede en er ook in hun ontwerpen duidelijk gebruik van hebben gemaakt.

De indeling van deze scriptie is als volgt. Ik begin met een inleiding over de gulden snede en een aantal verschijningvormen ervan. Vervolgens laat ik aan de hand van een beroemde gamba van de Engelse luthier Henry Jaye uit 1667 zien op welke manier de gulden snede een rol gespeeld kan hebben bij het bouwen van dit instrument. Ook andere voorbeelden zullen kort worden genoemd. Daarna volgt nog een discussie over de tendens om in esthetische vormen op de een of andere manier de gulden snede te willen herkennen. Ter afsluiting geef ik nog een lijstje van geraadpleegde literatuur.

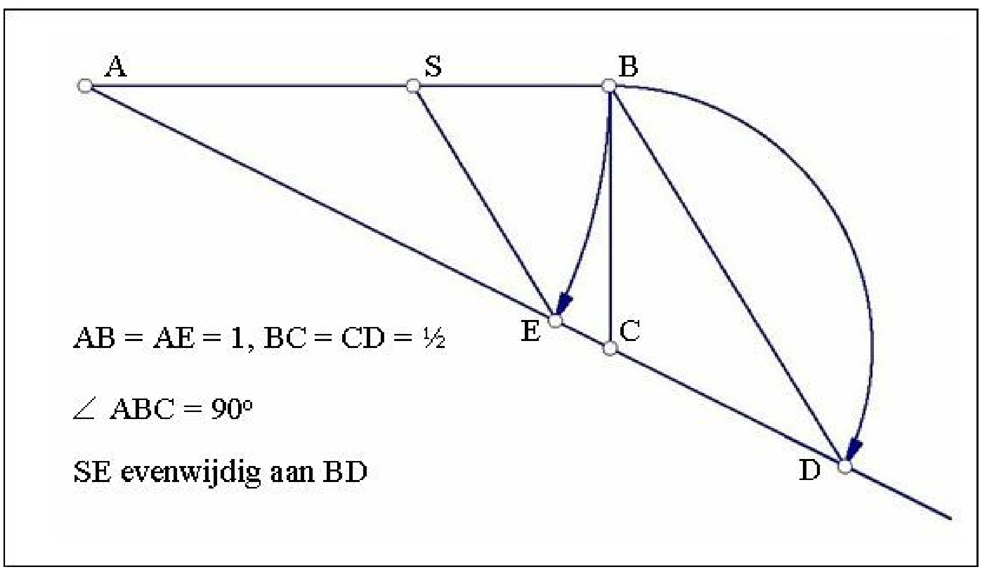
In mijn zoektocht heb ik nergens een voorbeeld kunnen vinden van een luthier die gebruikt maakt of gemaakt heeft van meer gecompliceerde meetkundige krommen dan cirkelbogen. Mijn oorspronkelijke vraag is daarmee helaas onbeantwoord gebleven.

Roel Stroeker
Krimpen aan den IJssel, april 2007

De Gulden Snede

De gulden snede is de verdeling van een lijnsegment in twee stukken die zich verhouden volgens de zogenaamde "goddelijke" (of "gulden") verhouding. Dat wil zeggen dat de totale lengte van het lijnsegment (a+b) zich verhoudt tot het grootste deel (a) als het grootste deel (a) tot het kleinste deel (b). Dus $a+b : a = a : b$ of $\frac{a+b}{a}=\frac{a}{b}$. Als we deze verhouding φ noemen, dan kunnen we afleiden dat $\varphi = 1{,}6180339887...$ Immers $\varphi=\frac{a}{b}=1+\frac{b}{a}=1+\frac{1}{\varphi}$ en dit leidt tot de vierkantsvergelijking $\varphi^2-\varphi-1=0$. Omdat volgens afspraak $\varphi>1$ (want $a>b$) volgt nu dat $\varphi=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{5}=1{,}618039887...$ De puntjes betekenen dat de decimale ontwikkeling van φ niet ophoudt maar oneindig ver doorloopt. Als we dus in het vervolg zeggen dat $\varphi=1{,}618$ dan gebruiken we slechts een benadering van φ en niet zijn werkelijke waarde.

De gulden verhouding is meer dan 2000 jaar bekend. Door de Grieken werd deze toegeschreven aan Pythagoras. We vinden de verhouding φ al in de Elementen van Euclides, de grondlegger van de vlakke meetkunde. Hij geeft ook een constructie met passer en liniaal. Het is niet moeilijk te zien hoe men zo'n constructie kan maken. Bedenk dat φ een verhoudingsgetal is. Uitgaande van een gekozen eenheid, dus lengte 1, hoeven we alleen $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ te construeren.



Figuur 1: Constructie van φ

Dit kan eenvoudig met behulp van een rechthoekige driehoek met rechthoekszijden van lengte 1 en $\frac{1}{2}$ en de bekende stelling van Pythagoras.

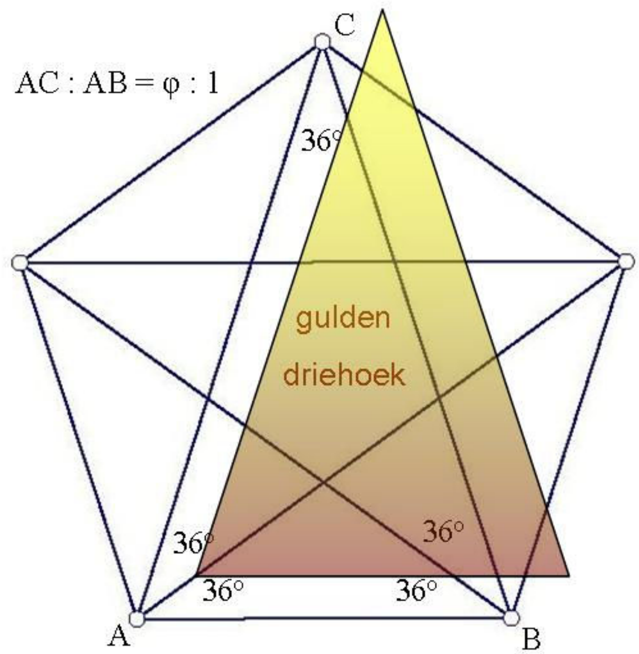
Immers, volgens deze stelling geldt dat de hypotenusa van deze driehoek gelijk is aan $\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}$. Tellen we hier $\frac{1}{2}$ bij op dan hebben we φ. We voeren nu zo'n constructie uit (zie figuur 1). We beginnen met lijnsegment AB en we geven dit segment lengte 1. Construeer nu een lijnstuk BC van lengte $\frac{1}{2}$ dat loodrecht staat op AB. We verbinden A met C en trekken dit lijnstuk door tot D zodanig dat ook CD lengte $\frac{1}{2}$ heeft (cirkel BC vanuit C om, dan is D is het snijpunt van deze cirkel met het verlengde van AC). Dan vinden we dat $\mathrm{AC}=\sqrt{\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2}=\sqrt{1^2+(\frac{1}{2})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5}.$ Hieruit volgt dat AD=$\frac{1}{2}\sqrt{5}+\frac{1}{2}=\varphi$. Vervolgens ontstaat E op AD door AB vanuit punt A om te cirkelen. Tenslotte trekken we door E een lijn evenwijdig aan DB. Deze snijdt AB in S. Omdat AD=φ en AE=1 volgt dat AD:AE=AB:AS=φ:1. Dus verdeelt het punt S het lijnsegment AB in de gewenste verhouding.

De Gulden Snede en de Fibonacci getallen

Er zijn boeken vol geschreven over de gulden snede. Een leuk boekje met veel informatie is dat van Huntley [4]. Wat is er toch zo bijzonder aan deze gulden snede? Allereerst komt de verhouding φ op alle mogelijke plaatsen in de (vooral klassieke) wiskunde voor. Tot aan de Renaissance waren het dan ook vooral wiskundigen die belangstelling toonden voor de gulden snede. Daarna ontstond er ook interesse voor φ vanuit de kunsten, meestal op grond van esthetische overwegingen. We noemen uiteenlopende gebieden als de wetenschap, de architectuur, de schilderkunst, de beeldhouwkunst, de muziek, de natuur, enz. In de volgende paragraaf zal ik een paar voorbeelden geven.

We kijken eerst even naar een paar voorbeelden uit de klassieke wiskunde. Allereerst is er de gulden rechthoek waarvan lengte en breedte zich verhouden als φ:1; deze rechthoek wordt door velen gezien als de meest natuurlijke en aantrekkelijke in esthetische zin. Verder zijn er de regelmatige 5-hoek en de gulden driehoek die gelijkbenig is met hoeken van 72°, 72° en 36°. De verhouding tussen een zijde en de basis van een gulden driehoek is die van de gulden snede. Uit figuur 2 (volgende bladzijde) die een regelmatige 5-hoek met ingeschreven pentagram (het symbool van de Pythagoreërs) laat zien wordt duidelijk hoe de gulden driehoek op verschillende manieren past in de regelmatige 5-hoek.

Tenslotte is de gulden verhouding φ nauw verbonden met de Fibonacci getallen. De rij van Fibonacci is een rij van getallen met de eigenschap dat elk getal uit de rij (behalve de eerste twee: dat zijn de getallen 1, 1) de som is van zijn twee voorgangers in de rij. Deze oneindig voortlopende rij begint dus als volgt: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987,… Voor uitgebreide informatie en veel toepassingen van deze rij zie [5]. Deze beroemde rij komt voor het eerst voor in de Liber Abaci van Leonardo van Pisa (Fibonacci) uit 1202 als een puzzel over het toenemende aantal konijnen in een populatie. Hierbij wordt ervan uitgegaan dat in de eerste maand de populatie bestaat uit één paar konijnen dat in de tweede maand en alle daarop volgende maanden zorgt voor één paar nakomelingen. Elk paartje zorgt dus in de tweede maand na de geboorte en alle maanden daarna zelf weer voor één paar nakomelingen.



Figuur 2: De gulden driehoek in de regelmatige 5-hoek

Het aantal konijnenpaartjes aan het begin van maand n geven we aan met F_n. Een volledige Engelse vertaling van de Liber Abaci (uit het Latijn) is verschenen in 2002 [7]. Dit boek heeft zeer veel invloed gehad op de ontwikkeling van de wiskunde in West Europa, o.a. door de introductie van de Hindu-Arabische getalnotatie. Het verband met de gulden verhouding φ kan als volgt worden geformuleerd: het quotiënt van twee opvolgende getallen van Fibonacci komt steeds meer met φ overeen naarmate we verder in de rij voortgaan.

Bijvoorbeeld, $\frac{F_6}{F_5}=\frac{8}{5}=1,6$ en $\frac{F_{11}}{F_{10}}=\frac{89}{55}=1,6181...$ en $\frac{F_{16}}{F_{15}}=\frac{987}{610}=1,618032...$ In de limiet, d.w.z. als we n onbegrensd laten aangroeien, geldt dus $\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n}=\varphi$.

In het vervolg van deze scriptie is de zogenaamde "gulden rij" van betekenis. Dit is de meetkundige rij met beginwaarde 1 en rede φ. Dit wil zeggen de rij $1,\varphi,\varphi^2,\varphi^3,\varphi^4,\ldots$ Omdat $\varphi^2=1+\varphi$ volgt dat $\varphi^3=\varphi\cdot\varphi^2=\varphi(1+\varphi)=\varphi+\varphi^2$ en $\varphi^4=\varphi\cdot\varphi^3=\varphi(\varphi+\varphi^2)=\varphi^2+\varphi^3$ enz. Dus in het bijzonder heeft deze gulden rij ook de speciale eigenschap van de Fibonacci rij, namelijk dat elk element van de rij gelijk is aan de som van zijn twee voorgangers. Een andere manier om deze rij te schrijven is dus $1, \varphi, 1+\varphi, 1+2\varphi, 2+3\varphi, 3+5\varphi, 5+8\varphi, \ldots$ De coëfficiënten van 1 en φ zijn dus steeds twee opvolgende Fibonaccigetallen! Samengevat (zie figuur 3):

$$\begin{array}{cccccccccc} 1 & \varphi & \varphi^2 & \varphi^3 & \varphi^4 & \varphi^5 & \varphi^6 & \cdots & \varphi^n & \cdots \\ = & = & = & = & = & = & = & \cdots & = & \cdots \\ 1 & \varphi & 1+\varphi & 1+2\varphi & 2+3\varphi & 3+5\varphi & 5+8\varphi & \cdots & F_{n-1}+F_n\varphi & \cdots \end{array}$$

Figuur 3: De φ-rij of gulden rij

Andere Verschijningsvormen van de Gulden Snede

In de loop van vele jaren, zelfs eeuwen, hebben vooraanstaande wetenschappers, kunstenaars en andere intellectuelen zich beziggehouden met de gulden snede en de onverwachte plaatsen waar deze zich lijkt te manifesteren. Men zou met enig recht kunnen zeggen dat een groot aantal vooraanstaande denkers uit alle mogelijke disciplines zich heeft laten inspireren door de gulden snede. Hoewel ik in deze scriptie voornamelijk geïnteresseerd ben in de toepassing van de gulden snede bij de vormgeving van de viola da gamba, lijkt het goed om een paar veelzeggende voorbeelden te geven op andere gebieden.

De moderne geschiedenis van de gulden snede begint met het boek Divina Proportione van Luca Pacioli uit 1509. Dit boek genoot ruime bekendheid bij wetenschappers en kunstenaars. Op grond hiervan en gezien de verschijningsdatum van dit boek is het niet onwaarschijnlijk dat ook de beroemde muziekinstrumentbouwers uit de 16de eeuw en later van de gulden snede op de hoogte waren. We zullen hier verder op ingaan in de volgende paragraaf. Een mooi voorbeeld uit de architectuur vinden we bij de Zwitserse architect le Corbusier. Zijn geloof in de mathematische orde van het heelal is sterk verbonden met de gulden snede en de Fibonaccigetallen. In zijn ontwerpen past hij vaak de gulden snede toe. Piet Mondriaan gebruikte de gulden snede veelvuldig in zijn meetkundige schilderijen. In zijn meesterwerk Sacrament of the Last Supper van de surrealistische Spaanse schilder Salvador Dali komt de gulden snede expliciet op verschillende plaatsen voor: het doek zelf is een gulden rechthoek en boven en achter de Jezus figuur tekent zich een enorm regelmatig 12-vlak af (elk van de twaalf zijden van deze driedimensionale meetkundige figuur, ook wel dodecaëder genaamd, is een regelmatige 5-hoek). Van Leonardo da Vinci wordt gezegd dat hij de gulden snede gebruikte bij de beschrijving van de ideale verhoudingen van het menselijk lichaam. Dit wordt echter door anderen in twijfel getrokken. De Franse componisten Eric Satie en Claude Debussy gebruikten de gulden snede en de Fibonacci getallen in verscheidene van hun werken, o.a. in Vexations en Trois Sonneries de la Rose+Croix (Satie) en Image, Reflections in Water (Debussy). De fascinatie die al deze vertegenwoordigers van de schone kunsten met de gulden snede hadden berustte steeds op hun individuele perceptie van schoonheid.

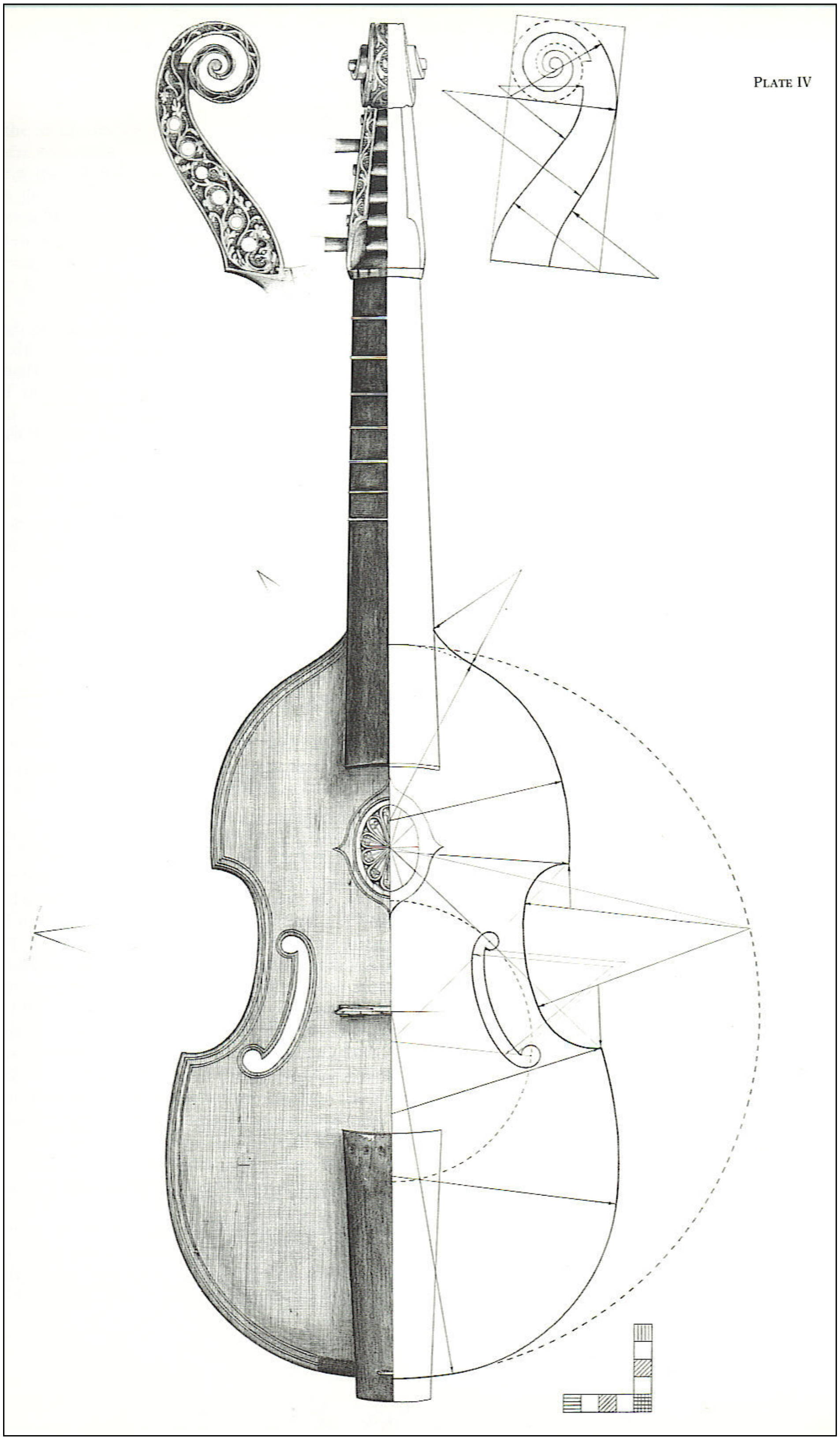
Het is niet moeilijk zo door te gaan, de lijst is onnoemelijk lang. Om het zicht op ons uiteindelijke doel — te weten de rol die de gulden snede wellicht speelt bij het ontwerp van snaarinstrumenten, in het bijzonder van de gamba — niet te verliezen wordt het de hoogste tijd om dit overzicht af te sluiten.

De Gulden Snede en de Viola da Gamba

Op grond van de voorgaande paragraaf en de velerlei gedaanten waarin de gulden snede zich blijkbaar manifesteert lijkt het alleszins gerechtvaardigd te onderzoeken in hoeverre de gulden snede een rol speelt of heeft gespeeld bij de bouw van snaarinstrumenten, in het bijzonder bij het ontwerp van de gamba. Ik heb nauwelijks enige relevante literatuur kunnen vinden, met als belangrijkste uitzondering, het prachtige "Geometry, Proportion and the Art of Lutherie" van de hand van Kevin Coates [2]. Vrijwel alle informatie in deze paragraaf is afkomstig uit dit boek. Coates heeft gezocht naar historische constructieve meetkundige methoden en het gebruik van bijzondere verhoudingen bij de constructie van drieëndertig historische snaarinstrumenten uit de zestiende, zeventiende en achttiende eeuw, waaronder negentien strijkinstrumenten. Deze laatste groep instrumenten omvatte o.a. zes gamba's, zes instrumenten uit de vioolfamilie, drie lira's da braccio, twee viola's d'amore, en twee pochettes. Bij het onderzoek speelden de volgende meetkundige en proportionele processen bij het ontwerpen van instrumenten een belangrijke rol:

i. het gebruik van horizontale en verticale, lineaire ratio's zoals in rechthoeken, en het gebruik van roosters
ii. het gebruik van volle cirkels, vesica pisces (symbool van twee overlappende cirkelsschijven met dezelfde straal) en cirkelbogen
iii. het gebruik van speciale, vaste verhoudingen, namelijk
    a) rationale verhoudingen, dus meetbaar met een gemeenschappelijke standaardmaat
    b) irrationale verhoudingen, zoals $\sqrt{5},\ \varphi$.
iv. spiraal meetkunde van de krul of kopje

In zijn conclusie op pagina 167 merkt Coates op dat zijn hypothese dat meetkundige en proportionele methoden gebruikt werden door de luthiers van de zestiende, zeventiende en achttiende eeuw door zijn onderzoek is bevestigd. Hij vraagt zich verder af hoe het komt dat er desondanks geen geschreven verwijzingen naar zijn, temeer omdat dit gebruik niet zichtbaar is. Kijkend naar de resultaten van zijn analyses valt op dat i., ii. en iii. a) veelvuldig worden waargenomen, iii. b) slechts in 10 van de 33 gevallen met twee twijfelgevallen. Van de zes gamba's is er één waarin de gulden snede overduidelijk aanwezig is, met nog één twijfelgeval, terwijl de $\sqrt{5}$ verhouding in drie andere gamba's wordt gesignaleerd.



Figuur 4: De kleine tenor gamba van Henry Jaye uit 1667

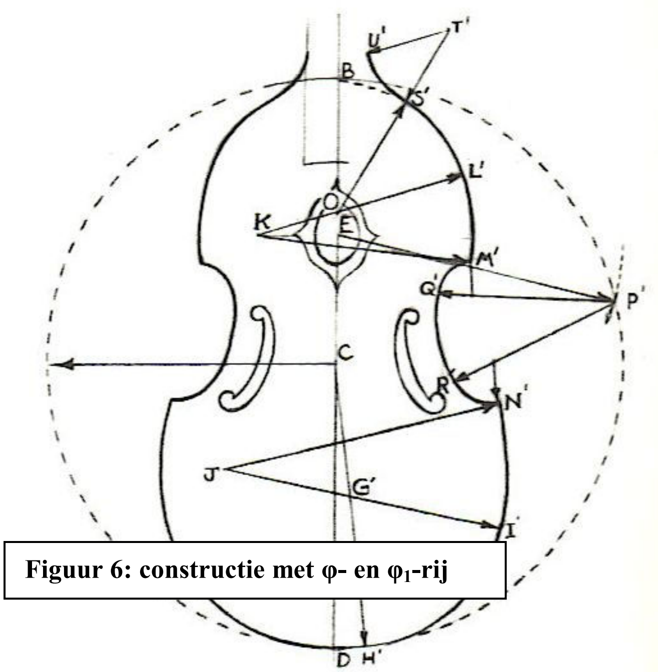
Bovengenoemde bijzondere gamba is de kleine tenor gamba van Henry Jaye uit 1667 die te vinden is in het Victoria and Albert Museum in Londen (zie figuur 4 op de vorige bladzijde). We zullen de analyse van Coates van de Jaye gamba nu nader beschouwen, in het bijzonder de wijze waarop de gulden snede zich in dit instrument volgens Coates manifesteert.

Twee geassocieerde φ-rijen spelen hierbij een cruciale rol. In figuur 5 geven we de basis φ-rij.

1	φ	$1+\varphi$	$1+2\varphi$
E	φE	$(1+\varphi)E$	$(1+2\varphi)E$
$=$	$=$	$=$	$=$
$49,443$	$80,000$	$129,443$	$209,443$

Figuur 5: Basis φ-rij

De eerste rij in de tabel is het begin van de φ-rij en in de laatste rij staan getallen uitgedrukt in mm die zich op dezelfde wijze verhouden als die in de rij erboven. De hierbij behorende eenheid is $E = 49,443$ mm als we uitgaan van een met φ corresponderende waarde van exact 80 mm. Deze waarden wijken enigszins af (minder dan 0,6 mm) van de waarden die bij de Jaye gamba gemeten zijn, nl. 49,5 129,5 en 209,5. In figuur 6 is C (plaats van de kam) precies het midden van BD. De straal van de grote cirkel door B en D met C als middelpunt is 209,5 mm. De lager gelegen kromming bestaat uit drie bogen, de eerste DH′ valt samen met de grote cirkel, de cirkelboog H′I′ heeft als middelpunt G′ met straal 112 mm en wijkt dus af van het gulden snede schema. De derde boog I′N′ is gecentreerd in J met straal 210 mm, een afwijking van iets meer dan 0,5 mm. De centrale C-kromming wordt geconstrueerd vanuit het punt P′ dat verkregen wordt door de cirkel met middelpunt E (het centrum van de rozet) en straal 209,5 mm te snijden met de grote cirkel. De boog R′Q′ ligt op de cirkel met middelpunt P′ en straal 129,5 mm. De twee andere bogen N′R′ en Q′M′ vallen niet in het gulden snede schema. De hoger gelegen kromming bestaat ook uit drie bogen die zich confirmeren aan een afgeleide φ-rij, de φ_1-rij. Het essentiële kenmerk van deze rij is dat $1+2\varphi_1 = 2\varphi$. In figuur 7 worden de overeenkomstige waarden gegeven.



Figuur 6: constructie met φ- en φ1-rij

1	φ_1	$1+\varphi_1$	$1+2\varphi_1 = 2\varphi$
E_1	$\varphi_1 E_1$	$(1+\varphi_1)E_1$	$(1+2\varphi_1)E_1$
$=$	$=$	$=$	$=$
$37{,}771$	$61{,}115$	$98{,}885$	$160{,}000$

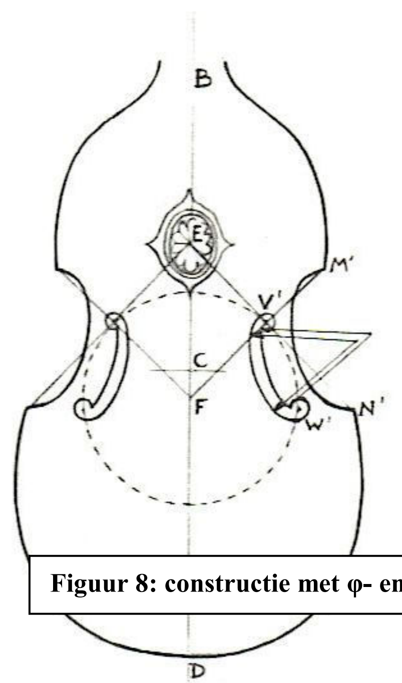
Figuur 7: Afgeleide φ-rij of φ_1-rij

De boog S’L’ heeft straal 98,9 mm en heeft zijn middelpunt in O, gelegen op de middellijn BD. Cirkelboog L’M’ heeft middelpunt K en straal 160 mm, terwijl de boog S’U’ straal 61,1 mm heeft en gecentreerd is in T’.

De positie en de belangrijkste boog van de C-gaten worden bepaald met de φ-waarde van 80 mm. Figuur 8 geeft de bijzonderheden.

Ook de bogen van de open krul van de Jaye gamba zijn conform de φ_1-rij. In de meetbare bogen van de stemschroevenkast is de φ-rij weer herkenbaar. We laten de details weg.

Ook bij een viertal beroemde violen, één van Andrea Amati (1564), één van Nicola Amati (1670) en twee van Antonio Stradivari (1666, 1703) ziet Coates duidelijke tekenen dat bij het ontwerp de gulden snede een rol heeft gespeeld. Ook sommige moderne vioolbouwers baseren hun ontwerpen op de gulden snede [1].



Figuur 8: constructie met φ- en φ_1-rij

Misvattingen betreffende de Gulden Snede

Men moet zeer voorzichtig zijn bij het “herkennen” van het gebruik van de gulden snede in alle mogelijke uitingen van kunst en in de natuur. Afrondingen en andere benaderingen kunnen er immers voor zorgen dat zelfs bij nauwkeurig meten fouten ontstaan die een dergelijke herkenning op losse schroeven zetten. In een groot aantal geschriften wordt beweerd dat φ op de een of andere manier betrokken is bij het ontwerp van de Grote Piramide van Gizeh. Martin Gardner schrijft in [3] een vermakelijk verhaal dat dit geenszins bewezen, zelfs niet aannemelijk is. Een vrije vertaling van een passage uit [3] op pagina’s 177-178 luidt als volgt:

> … Als je een ingewikkeld bouwwerk zoals de Grote Piramide gaat opmeten, dan heb je al gauw een grote hoeveelheid lengten om mee te spelen. Als je maar genoeg geduld hebt om deze op alle mogelijke manieren te combineren, dan zal je stellig vele getallen vinden die samenvallen met belangrijke historische data of wetenschappelijke constanten. Omdat je niet aan regels gebonden bent, moet het al gek lopen als de-

> ze zoektocht naar Piramide "waarheden" niet aanzienlijke successen zal boeken.
>
> …
>
> Dit goochelen met getallen wordt enorm veel gemakkelijker gemaakt door twee significante feiten. (1) De maten van de verschillende Piramide lengten liggen helemaal niet vast … (2) De getallen die staan voor wetenschappelijke waarheden zijn evenzo vaag. De afstand tot de zon varieert nogal omdat de aarde zich niet in een cirkel maar in een ellips om de zon beweegt. In zo'n geval heb je een grote keuze aan getallen. Je kan de kortste afstand van de aarde tot de zon nemen of de langste of het gemiddelde van deze twee. …

Om dit eens uit te proberen heb ik alle mogelijke metingen verricht aan een onlangs van mijn kinderen cadeau gekregen werkkruk (zie foto hiernaast) om te zien of er iets "bijzonders" te ontdekken viel. Het was zonder berekeningen al direct duidelijk dat in de metalen voetensteun een regelmatige 5-hoek zichtbaar is. Aha, de gulden snede dus! Verder is de zitting een houten cirkelschijf (we denken dus onmiddellijk aan het getal $\pi = 3,14159...$) met een dikte van 3,14 cm. Maar dat is π met een foutje van $0,05\%$! Het kan dus bijna niet anders of de maker van de kruk had bij het ontwerpen van de kruk φ en π in gedachten! Het zal de lezer duidelijk zijn dat je zulke onzin beter kan vermijden.

In [6] wordt overtuigend beargumenteerd waarom vele claims zoals de bovenstaande Piramide claim onterecht zijn. Ik noem er nog een paar: de Grieken zouden φ gebruikt hebben in het Parthenon, een groot aantal schilders (waaronder Leonardo da Vinci) zou φ gebruikt hebben, in het UN gebouw in New York zou φ aanwezig zijn, de gulden rechthoek zou de meest aantrekkelijke rechthoeksvorm zijn, enz.

Conclusie

De analyse van Coates is mijns inziens wel overtuigend. Vooral het ontwerp van het centrale deel van het bovenblad lijkt geheel beheerst te worden door de gulden snede. Toch blijft er twijfel. Als men zich realiseert dat steeds met benaderingen wordt gewerkt en niet met exacte waarden, dan blijft de vraag: welke marge dient men aan te houden om te kunnen geloven in de hypothese dat de gulden snede werkelijk door de bouwer is gebruikt? Aan de andere kant moet men rekening houden met het feit dat kleine afwijkingen ook het gevolg kunnen zijn van plaatselijke vergissingen die aanpassingen noodzakelijk maken. Het blijft immers mensenwerk.

Gebruikte literatuur

[1] Baginsky, Vladislav – Construction of Contour and Arch with Golden Section (translated from the Russian by Frederik Liden). See the website http://www.violin.odessa.ua/method.html.

[2] Coates, Kevin – Geometry, Proportions and the Art of Lutherie. Oxford Un. Press, 1985. ISBN 0-19-816139-5.

[3] Gardner, Martin – Fads & Fallacies in the Name of Science. Dover Publ. 1957. ISBN 0-486-20394-8.

[4] Huntley, H.E. – The Divine Proportion: A Study in Mathematical Beauty. Dover Publ. 1970. ISBN 0-486-22254-3.

[5] Koshy, Thomas – Fibonacci and Lucas Numbers with Applications. Pure and Applied Mathematics. Wiley, 2001. ISBN 0-471-39969-8.

[6] Markowsky, George – Misconceptions about the Golden Ratio. The College Mathematical Journal, Vol. 23, nr. 1 (1992), 2–19.

[7] L.E. Sigler – Fibonacci's Liber Abaci (A Translation into Modern English of Leonardo Pisano's Book of Calculations). Springer 2002. ISBN 0-387-95419-8